

Lista 3 de exercícios

Prazo de entrega: 03/02/2025

- Todas questões terão o mesmo peso para a nota da lista.
- Se as soluções forem escritas à mão, as respostas devem estar escritas à caneta.
- Por favor, mantenha a sua letra legível.
- Justifique todas as suas respostas.

1. Considere uma variável aleatória bidimensional (X, Y) com função densidade conjunta

$$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$$

- Calcule as densidades marginais de X e de Y .
- Calcule a densidade condicional de $X|Y = y$ e de $Y|X = x$, em que $y > 0$ e $x > 0$ são fixos.
- Calcule as esperanças condicionais $E(X|Y = y)$ e $E(Y|X = x)$.

2. Considere uma variável aleatória bidimensional (X, Y) com função densidade conjunta

$$f(x, y) = 3e^{-(x+3y)}, \quad x > 0, y > 0.$$

- Calcule as densidades marginais de X e de Y .
- Calcule a densidade condicional de $X|Y = y$, em que $y > 0$ é fixo.
- Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y . Dica: X e Y são independentes?

3. Sejam X_1, \dots, X_{20} variáveis aleatórias discretas com a seguinte função de probabilidade:

$$P(X = k) = \frac{e^{-1}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Nesse caso, dizemos que cada X_i possui distribuição Poisson com parâmetro $\lambda = 1$, que também é a média e variância desta variável aleatória. A distribuição Poisson é bastante utilizada para modelar dados de contagens.

- Use a desigualdade de Markov para obter um limite superior para a probabilidade

$$P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right).$$

Dica: use a propriedade $E\left(\sum_{i=1}^{20} X_i\right) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i)$.

- Use o teorema central do limite para aproximar a probabilidade

$$P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right).$$

4. Uma companhia de seguros tem 10.000 carros segurados. O valor esperado reclamado por cada segurado em um ano é de R\$ 240, com desvio padrão de R\$ 800. Use o teorema central do limite para obter uma aproximação para a probabilidade de que o total reclamado em um ano supere R\$ 2,7 milhões.